Grafi euleriani e hamiltoniani

Storicamente, la teoria dei grafi ha inizio nel 1736 con un lavoro di Eulero in cui egli affronta e risolve il famoso problema dei ponti della città di Konigsberg, che consiste nel determinare - se possibile - un modo per percorrere una ed una sola volta, ritornando al punto di partenza, i sette ponti della città (cfr. Figura 1).

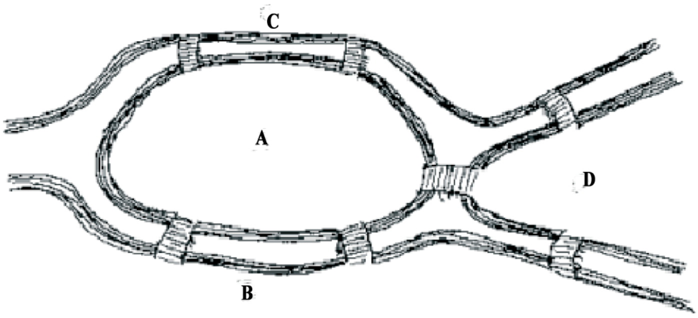

Figura 1: I sette ponti della città di Konigsberg

Eulero tradusse tale problema in un problema di teoria dei grafi, come illustrato in Figura 2. Si noti che il grafo associato ai sette ponti della città di Konigsberg è in realtà un *multigrafo* (perchè contiene spigoli multipli); le nozioni seguenti di teoria dei grafi sono però valide anche in tale ambito esteso.

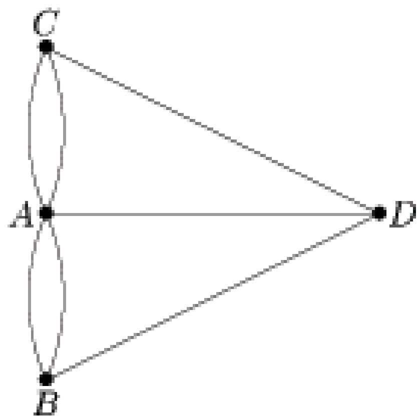

Figura 2: Grafo associato ai sette ponti

Definizione 1. Dato un grafo $G = (V, E)$, si dice *passeggiata* in G una successione finita di vertici e spigoli consecutivamente adiacenti: $u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{k-1}, e_k, u_k$, dove $u_i \in V,\ e_i \in E$ ed $e_i = \{u_{i-1}, u_i\}\ \forall i = 1, \ldots k$. Se $u_0 = u_k$, la passeggiata si dice *chiusa.*

Si noti che un cammino (risp. un ciclo) in G é una passeggiata (risp. una passeggiata chiusa) in cui sono coinvolti vertici e spigoli tutti distinti (a parte il caso del ciclo, in cui vertice iniziale e vertice finale coincidono).

Definizione 2. Dato un grafo $G = (V, E)$, una passeggiata (risp. una passeggiata chiusa) in G si dice *elementare* se non contiene mai due volte lo stesso spigolo.

Definizione 3. Dato un grafo $G = (V, E)$, una passeggiata (risp. una passeggiata chiusa) in G si dice *semplice* se non visita mai due volte lo stesso vertice (a parte il caso in cui sia chiusa, in cui vertice iniziale e vertice finale coincidono).

Definizione 4. Dato un grafo $G = (V, E)$, si dice *cammino hamiltoniano* (risp. *ciclo hamiltoniano*) in G una passeggiata (risp. una passeggiata chiusa) in G che tocca tutti i vertici di G, una ed una sola volta.

Definizione 5. Dato un grafo $G = (V, E)$, si dice *cammino euleriano* (risp. *ciclo euleriano*) in G una passeggiata (risp. una passeggiata chiusa) in G che contiene tutti gli spigoli di G, una e una sola volta.

Ovviamente, un cammino hamiltoniano (risp. ciclo hamiltoniano) è una passeggiata semplice (risp. una passeggiata chiusa semplice), mentre un cammino euleriano (risp. ciclo euleriano) è una passeggiata elementare (risp. una passeggiata chiusa elementare).

Definizione 6. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *grafo euleriano* se contiene almeno un ciclo euleriano.

Definizione 7. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *grafo hamiltoniano* se contiene almeno un ciclo hamiltoniano.

Non sono note condizioni "semplici per verificare se un dato grafo G è hamiltoniano o no. Banalmente, condizione necessaria - ma non sufficiente - è che G sia connesso, con vertici tutti di grado ≥ 2; condizione sufficiente - ma non necessaria - è invece che il grado di ogni vertice sia maggiore o uguale a $\frac{\#V(G)}{2}$ (Teorema di Dirac).

Eulero ha individuato la condizione necessaria e sufficiente perchè un grafo sia euleriano.[1]

Proposizione 1. (Teorema di Eulero) *Un grafo $G = (V, E)$ è euleriano se e solo se è connesso con vertici tutti di grado pari.*

Poichè il problema dei ponti della città di Konigsberg equivale a stabilire se il grafo associato è euleriano o no, e poichè il multigrafo di Figura 2 è connesso con vertici (tutti) di grado dispari, ne segue che il problema ha risposta negativa: NON esiste alcuna possibilità di percorrere i sette ponti una ed una sola volta, ritornando al punto di partenza.

Dimostrazione del teorema di Eulero
La condizione espressa sulla paritá del grado dei vertici é ovviamente necessaria. Viceversa, sia G un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari e sia

$$W = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{k-1}, e_k, u_k$$

dove $u_i \in V$ ed $e_i \in E$ una passeggiata in G, in cui nessuno spigolo compare piú di una volta (quindi: una passeggiata elementare) di lunghezza massima. Dato che W non puó essere prolungata con laggiunta di altri lati, essa deve contenere tutti gli spigoli incidenti ad u_k; poiché, per ipotesi, il numero di tali lati é pari, ció é possibile solo se $u_k = u_0$ (altrimenti lultimo lato e_k di W contribuirebbe a far diventare dispari il numero di lati incidenti ad u_k presenti in W). Abbiamo quindi dimostrato che W é una passeggiata elementare chiusa.
Se dimostriamo che contiene tutti gli spigoli, resta provato che W é ciclo euleriano in G. Supponiamo allora, per assurdo, che W non sia un ciclo euleriano, cioé che in W non compaiano tutti gli spigoli di G. Poiché G é connesso, deve quindi esistere un lato $\bar{e} \in G$, tale che $\bar{e} \notin W$ ma tale da avere uno dei suoi due estremi in W. Sia $\bar{e} = \{\bar{v}, u_j\}$ un tale spigolo, con $\bar{v} \notin W$ e $u_j \in W$. In questo modo é possibile costruire la passeggiata $W' = \bar{v}, \bar{e}, u_j, e_j, u_{j-1}, e_{j-1}, \ldots, u_0 = u_k, e_k, u_{k-1}, e_{k-1}, \ldots, e_{j+1}, u_j$ che é piú lunga di W e in cui nessuno spigolo compare piú di una volta. Ció contraddice la ipotesi iniziale di massimalitá di W, e pertanto W deve essere un ciclo euleriano, provando cosí la tesi. $\square$

[1] Si dimostra che un grafo ammette un <u>cammino</u> euleriano se e solo se è connesso ed i suoi vertici hanno tutti grado pari, esclusi al più due con grado dispari (che saranno il primo e l'ultimo vertice del cammino euleriano).